CORRECTION
APPLICATION DU PRODUIT SCALAIRE

EXERCICE 1 : *LA FORMULE DE HERON*

ABC est un triangle . a, b et c désignent respectivement les longueurs [BC], [AC] et [AB].

On note $p = \dfrac{a + b + c}{2}$ son demi-périmètre et S son aire.

1) Exprimer S en fonction de b,c et $\widehat{BAC}$

$S = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{BAC}$

2) Exprimer $4 b^2 c^2 \sin^2 \widehat{BAC}$ en fonction de a, b et c.

D'après le théorème d'Al Kashi :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC} \Leftrightarrow 2bc \cos \widehat{BAC} = b^2 + c^2 - a^2$

Ainsi ,

$4 b^2 c^2 \cos^2 \widehat{BAC} = (b^2 + c^2 - a^2)^2 \Leftrightarrow 4 b^2 c^2 (1 - \sin^2 \widehat{BAC}) = (b^2 + c^2 - a^2)^2 \Leftrightarrow 4 b^2 c^2 \sin^2 \widehat{BAC} = 4 b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

3) En déduire une expression de S² en fonction de a, b et c.

$4 b^2 c^2 \sin^2 \widehat{BAC} = 4 b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \Leftrightarrow \dfrac{b^2 c^2 \sin^2 \widehat{BAC}}{4} = \dfrac{4 b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16} \Leftrightarrow S^2 = \dfrac{4 b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}$

4) Démontrer que $S = \sqrt{p (p - a) (p - b) (p - c)}$

On a , $S = \dfrac{1}{4} \sqrt{4 b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$

$$\begin{aligned} 4 b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 &= (2 bc - (b^2 + c^2 - a^2)) (2 bc + (b^2 + c^2 - a^2)) \\ &= (a^2 - (b - c)^2) ((b + c)^2 - a^2) \\ &= (a - (b - c)) (a + (b - c)) ((b + c) - a) ((b + c) + a) \\ &= (a - b + c) (a + b - c) (b + c - a) (b + c + a) \\ &= 16 p (p - a) (p - b) (p - c) \end{aligned}$$

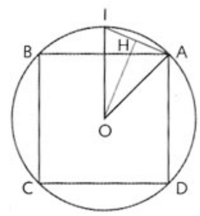
On en déduit que :

$S = \sqrt{p (p - a) (p - b) (p - c)}$

EXERCICE 2 :

Soit un carré ABCD inscrit dans un cercle C de centre O et de rayon r .

La médiatrice du segment [AB] coupe le cercle C en I . On note H le milieu de [AI].



a) Construire l'octogone régulier, inscrit dans le cercle C.

b) Calculer le côté IA de l'octogone, puis OH en fonction du rayon r.

D'après le théorème d'Al Kashi :

$IA^2 = OI^2 + OA^2 - 2\, OI\, OA \cos \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow IA^2 = r^2 + r^2 - 2 r r \cos \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow IA^2 = (2 - \sqrt{2}) r^2$

$IA > 0$, donc $IA = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ r$

OAI est isocèle en H ; on a donc $(OH) \perp (AI)$

D'après le théorème de Pythagore, dans OHI rectangle en H :

$OH^2 = OI^2 - IH^2 = r^2 \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

$OH > 0$, donc $OH = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} r$

c) Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOH}$

... $\widehat{AOH} = \dfrac{\pi}{8}$

d) En déduire $\cos \dfrac{\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{\pi}{8}$

$\cos \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{OH}{OA} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{AH}{OA} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

EXERCICE 3 :

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 20$

Ainsi C est le cercle de centre I (1 ; 1) et de rayon $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b)

- $(3-1)^2 + (5-1)^2 = 4 + 16 = 20$ donc $A \in C$
- $(5-1)^2 + (-1-1)^2 = 16 + 4 = 20$ donc $B \in C$

c)

- La tangente d en A au cercle C et la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (IA)

On a $\overrightarrow{IA}\ (2 ; 4)$ et $\overrightarrow{IA}$ est un vecteur normal à d.
Ainsi d a une équation de la forme : $2x + 4y + c = 0$ (avec $c \in \mathbb{R}$)
De plus d passe par A , donc :

$$2 \times 3 + 4 \times 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -26$$

Ainsi d a pour équation :

$$2x + 4y - 26 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 13 = 0$$

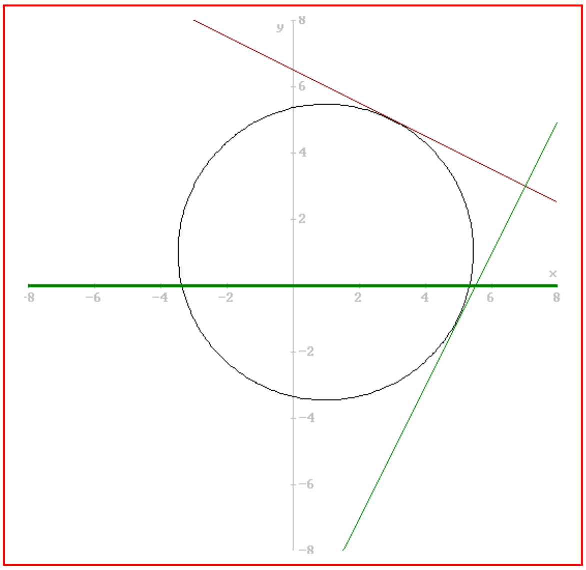
- La tangente d' en B au cercle C et la droite passant par B et perpendiculaire à la droite (IB)

On a $\overrightarrow{IB}\ (4 ; -2)$ et $\overrightarrow{IB}$ est un vecteur normal à d' .
Ainsi d' a une équation de la forme : $4x - 2y + c' = 0$ (avec $c' \in \mathbb{R}$)
De plus d' passe par B , donc :

$$4 \times 5 + 2 \times 1 + c' = 0 \Leftrightarrow c' = -22$$

Ainsi d a pour équation :

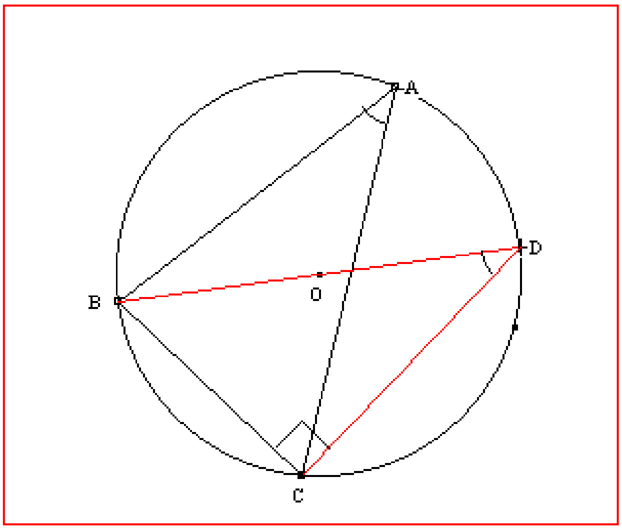
$4x - 2y - 22 = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 11 = 0$



d) Les coordonnées de T vérifient le système ci-dessous :

$$\begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ 2x - y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

EXERCICE 4 :



a) Les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ interceptent le même arc de cercle.
On a donc $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \widehat{A}$
Dans le triangle BCD , C appartient au cercle, donc BCD est rectangle en C.
Ainsi :

$\sin \widehat{BDC} = \sin \widehat{A} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$ ...

b)

On sait que $S = \frac{1}{2} b c \sin \widehat{A}$

Donc $S = \frac{1}{2} b c \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} b c \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$

EXERCICE 5 :

a) $\cos 2x \cos x \sin x = \cos 2x \times \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2}\cos 2x \sin 2x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 4x = \frac{1}{4}\sin 4x$

$\cos 4x \cos 2x \cos x \sin x = \cos 4x \times \frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{4}\cos 4x \sin 4x = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \sin 8x = \frac{1}{8}\sin 8x \quad (1)$

b) En utilisant (1) et $\sin\frac{8\pi}{9} = \sin\frac{\pi}{9}$, on obtient : $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$